PAIDÉI@
ISSN - 1982-6109
REVISTA CIENTÍFICA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: ELEMENTOS HISTÓRICOS E CULTURAIS

COMBINATORY ANALYSIS: HISTORICAL AND CULTURAL ELEMENTS

Carlos Alberto de Miranda Pinheiro

Fabricio da Silva Lobato

Cassio Cristiano Giordano

DOI: 10.5281/zenodo.14732566

Resumo

Neste artigo apresentamos o resultado de uma pesquisa de caráter bibliográfico, cujo objetivo foi identificar alguns aspectos do desenvolvimento histórico e cultural da Análise Combinatória. Utilizamos como principais fontes para a coleta de informações históricas baseado em autores fundamentados em uma corrente factual da trajetória cultural e histórica da Matemática. A Análise Combinatória é a parte do universo matemático que apresenta poucos estudos acerca de sua história, seja no contexto de sua constituição como objeto de estudo dos matemáticos, seja no contexto escolar. A pesquisa focou elementos históricos e culturais que evidenciassem a evolução dos objetos da Análise Combinatória que são estudados na Educação Básica. O principal resultado é que os objetos estudados na Análise Combinatória surgiram por meio de práticas culturais desenvolvidas pelos chineses, indianos, judeus e árabes.

Palavras-Chave: Análise Combinatória; História da Matemática; Práticas Culturais.

Abstract

In this article we present the results of a bibliographical research, the objective of which was to identify some aspects of the historical and cultural development of Combinatorial Analysis. We use the main sources for collecting historical information based on authors based on a factual current of the cultural and historical trajectory of Mathematics. Combinatorial Analysis is the part of the mathematical universe that presents few studies about its history, whether in the context of its constitution as an object of study by mathematicians, or in the school context. The research focused on historical and cultural elements that highlighted the evolution of Combinatorial Analysis objects that are studied in Basic Education. The main result is that the objects studied in Combinatorial Analysis emerged through cultural practices developed by the Chinese, Indians, Jews and Arabs.

Keywords: Combinatorial Analysis; History of Mathematics; Cultural Practices.

INTRODUÇÃO

O estudo da análise combinatória ganhou destaque na matemática moderna, e os avanços nesse campo possibilitaram o desenvolvimento de várias aplicações, como na área da computação.

O contexto histórico desenvolvido nesta pesquisa é, em sua maioria, extraído de autores enraizados em uma tendência factual da história da Matemática. Contudo, interessa-nos extrair dos conteúdos desses autores evidências que apontem para o desenvolvimento histórico e cultural da Análise Combinatória com ênfase nos objetos estudados na Educação Básica. Nesse sentido, procuramos nos limitar aos episódios históricos que apresentam as passagens dos objetos básicos da Combinatória escolar.

Sendo assim, apresentamos o contexto histórico da Análise Combinatória, no qual vamos designar, para um melhor entendimento, os tópicos da Combinatória na cultura Chinesa, Indiana, Judaica, Árabe e Europeia, onde procuramos descrever o desenvolvimento da Combinatória até o século XIV. Para isso, realizamos um estudo bibliográfico que, segundo Gil (2011), é desenvolvido a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Com isso, utilizamos como principal fonte os estudos retirados do livro de Wilson e Watkins (2013), do livro de Katz (2010) e o texto de Biggs (1979).

A Análise Combinatória é uma área da Matemática que auxilia no estudo do cálculo de possibilidade, e a sua origem data de séculos atrás, com ideias e práticas simples de contar e manipular objetos, de forma intuitiva, até as formulações matemáticas elaboradas que temos hoje. Nesse sentido, este artigo tem por objetivo apresentar uma análise histórica sobre a evolução da Análise Combinatória.

Desde a Antiguidade, a contagem era vista como essencial para se ter controle sobre bens e mercadorias. Dessa forma, o objeto de estudo da Análise Combinatória surgiu a partir de problemas ligados a atividades cotidianas, como o comércio e a organização de exércitos, que exigiam a manipulação de conjuntos finitos de objetos. A abordagem era, inicialmente, de cunho intuitivo e experimental, com a utilização de uma série de artifícios de contagem em diversas culturas, como veremos a seguir.

COMBINATÓRIA NA CULTURA CHINESA

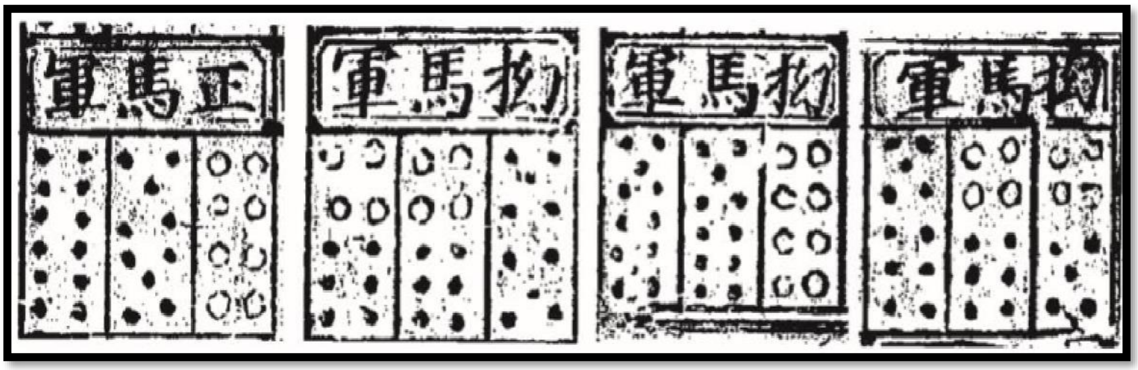
Um dos registros mais antigos sobre o uso da Combinatória ocorreu na China, no período anterior à dinastia Chou (1150-249 a.C.). Trata-se de um livro escrito por figuras lineares, compostas de linhas inteiras e linhas interrompidas, superpostas em conjuntos de três e seis linhas, chamados "Kua" (“signo”). Esse livro secular denominado *I Chou*, atualmente conhecido como *I Ching ou livro das mutações*, descreve as sementes da cultura, de extraordinária complexidade e riqueza, que, ao longo dos milênios seguintes, viria a se desenvolver na China. Pinto (2006) descreve que:

> A sabedoria contida nos Kua veio a exercer uma influência decisiva nos rumos futuros da civilização chinesa. A tradição desses Kua era, até meados da dinastia *Chou*, identificada com a designação “I” ( ), um ideograma de origem controvertida e que tem sido traduzido por "mutação". Para a China antiga, o nome de algo era considerado não apenas como um rótulo arbitrariamente atribuído, mas, antes, uma expressão do ser mesmo daquilo que em seu nome se deixa ver, se desvela. Essa concepção será desenvolvida mais tarde por Confúcio, para quem a harmonia do mundo depende da retificação dos nomes (Pinto, 2006, p.1).

Com a passagem de outras dinastias, o livro tornou-se um clássico (“Ching”), e diante da grande relevância que a obra representa para cultura chinesa passou a ser chamada de *I Ching* (clássico *livro das mutações*). As bases dos Kua no *I Ching* são o Yang (-) e o Yin (- -). Estes signos são combinados, como já foi dito acima, em conjuntos de três linhas (trigramas) e seis linhas (hexagramas). Com isso, há $2^3 = 8$ trigramas e $2^6 = 64$ hexagramas. A partir disso, Biggs (1979) considera que os chineses já tinham alguma ideia da regra $r^n r^n$ que o autor denomina de regra da combinação com repetição, para a combinatória contemporânea é o arranjo com repetição de elementos. Contudo, o *I Ching* não apresenta nenhum problema real que necessite do conhecimento combinatório dos dias atuais para resolvê-lo.

Para Bréard (2010, p. 66), as práticas combinatórias desenvolvidas na cultura chinesa tiveram uma presença marcante na constituição de jogos. A figura 1 apresenta o mais conhecido objeto de muitos estudiosos:

Figura 1: *Yapai* ou jogo de blocos de marfim



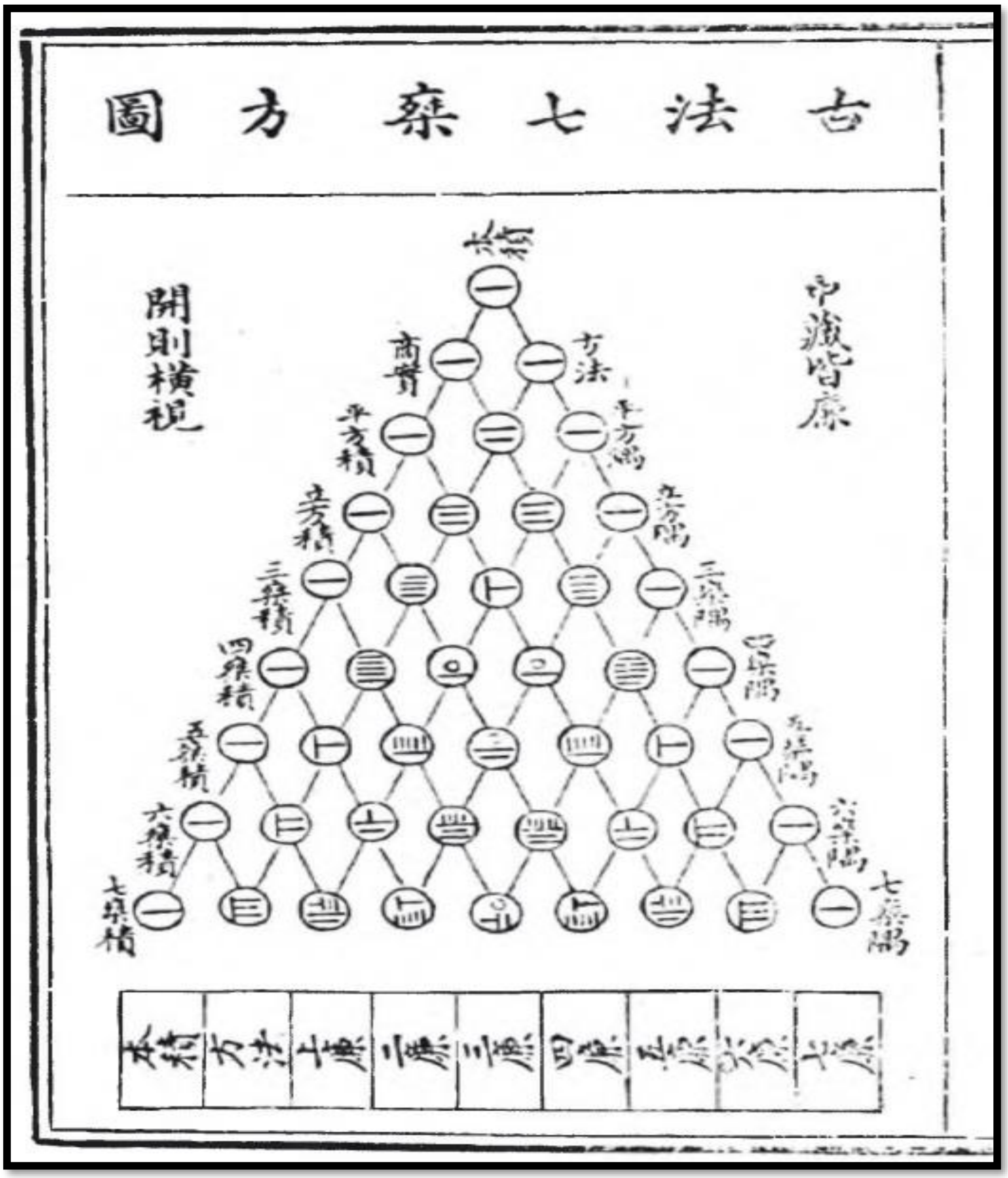
Fonte: Bréard (2013, p.66).

Na figura 1, observamos as possíveis permutações de pontos nos três ‘blocos de marfim’, cada bloco descrevendo dois dos números 4, 5 e 6. Para Bréard (2010), o jogo apresenta características físicas de um dominó e tem sua origem na dinastia Song Xuanhe (1082-1135). A autora descreve, também, que:

> A atividade combinatória consistia de enumerar as possíveis permutações do número de pontos em uma combinação de três blocos, como mostrado acima. Os três pares mostrados na esquerda eram chamados de ‘cavalaria regular’, enquanto que todas as outras permutações eram referidas como ‘cavalarias irregulares’. É possível que esquemas de vitórias no jogo de blocos de marfim fossem baseados em considerações combinatórias, mas não há evidencias da existência de um conceito de probabilidade (Bréard, 2010, p. 66, tradução nossa).

Outro registro importante, presente nas antigas obras chinesas, é o triângulo aritmético (Figura 2). A primeira manifestação da utilização do triângulo foi no livro de Yang Hui, sobre extração de raízes, datado do ano de 1261.

Figura 2: Triângulo Aritmético



Fonte: Eves (1997, p.251).

Ainda não há evidências que indiquem, no contexto da Análise Combinatória, o interesse dos chineses antigos pelo triângulo aritmético, nem se este é fruto de um intercâmbio cultural com a civilização árabe ou a indiana. Mas Bréard (2013) afirma que:

> Na China, sabemos apenas de seu importante uso no contexto de técnicas de interpolação, soluções de equações polinomiais e a construção de séries aritméticas finitas – em particular, através de um tratado do início do século XIV, o Siyuan yujian (O Espelho de Jade dos Quatro Elementos, 1303) escrito por Zhu Shijie, que colocou o triângulo no início de seu livro. Embora Zhu

> não tenha apresentado uma interpretação combinatória do triângulo, seu interesse em práticas combinatórias atingiu outro nível: a terminologia usada para a série finita foi construída de combinações de expressões binomiais no senso linguístico. Um significa matemático foi anexado para cada prefixo ou sufixo, refletindo a fatoração de cada termo na série aritmética. Problemas inversos (tais quais quantos termos formam uma dada soma) foram resolvidos por técnicas de interpolação, usando os coeficientes do triângulo (Brèard, 2013, p. 69, tradução nossa).

A citação mostra a importância do Triângulo aritmético na matemática chinesa, principalmente no contexto de técnicas de interpolação, solução de equações polinomiais e construção de séries aritméticas finitas. O autor destaca o tratado "O Espelho de Jade dos Quatro Elementos" escrito por Zhu Shijie no século XIV, que colocou o triângulo no início de seu livro.

Embora Zhu Shijie não tenha apresentado uma interpretação combinatória do triângulo, ele utilizou a terminologia combinatória para construir a série finita, refletindo a fatoração de cada termo na série aritmética, no qual destaca que problemas inversos, como determinar quantos termos formam uma dada soma, foram resolvidos utilizando técnicas de interpolação e os coeficientes do Triângulo aritmético.

Com isso, podemos perceber a importância do Triângulo aritmético como uma ferramenta matemática fundamental na China antiga, sendo utilizado em diversos contextos e demonstrando o alto nível de conhecimento matemático dos estudiosos da época.

A abordagem combinatória e as técnicas de interpolação utilizadas por Zhu Shijie mostram a criatividade e profundidade de pensamento dos matemáticos chineses naquela época, além disso, destaca a importância da linguagem matemática e da terminologia precisa na resolução de problemas matemáticos complexos.

Outras culturas,como a indiana e judaica desenvolveram estudos relacionados a Combinatória, não ficando restrito apenas a cultura chinesa, contribuindo para o desenvolvimento da Combinatória moderna.

COMBINATÓRIA NA CULTURA INDIANA E JUDAICA

No período que antecede à era cristã (século sexto a.C.), os historiadores descobriram o tratado médico de Susruta desenvolvido na cultura Indiana. Segundo Katz (2010), esse documento descreve:

> Que podem ser feitas 63 combinações de seis gostos diferentes – amargo,

> azedo, salgado, adstringente, doce e picante – tomando-se um de cada vez, dois de cada vez, três de cada vez... Por outras palavras há cinco gostos simples, 15 combinações de dois, 20 combinações de três, e assim sucessivamente (Katz, 2010, p.285).

O autor ressalta, ainda, que outras obras da mesma época incluem cálculos semelhantes relativos a tópicos como categorias e sentidos filosóficos. Katz (2010) considera, em suas investigações, que toda a obra analisada sempre apresentava na amostra calculada números pequenos e, com isso, o método utilizado para obter os resultados poderia ter sido a numeração direta. Dessa forma, não há nenhum indício que no referido período os indianos haviam desenvolvido alguma fórmula para facilitar os cálculos. Contudo, uma obra do século VI (d.C.) apresenta um problema semelhante descrito no tratado médico de Susruta, mas dentro de um contexto diferente.

A obra, segundo Katz (2010), descreve o interesse do indiano Varãhmamiria que tentou criar perfumes usando quatro ingredientes de um total de 16, cujo resultado obtido foi 1820 maneiras diferentes de escolher os ingredientes. Este caso aponta indícios que Varãhmamiria já conhecia algum método para resolver o problema dos ingredientes do perfume, pois o resultado do problema é muito elevado. Os registros da prática combinatória desenvolvida pelos indianos descrevem que, no século IX (d.C.), o estudioso Mahãvĩra apresentou um método para resolver o problema dos ingredientes:

> A regra respeitante a possíveis variedades de combinações entre coisas dadas: começando com uma e aumentando de uma, deixe-se que o número delas alcance o número dado de coisas escrevendo-os na ordem regular e na ordem inversa (respectivamente) numa fila horizontal superior e numa fila horizontal inferior. Se o produto de um, três ou mais dos números da fila superior, considerados da direita para a esquerda é dividido pelo produto correspondente de um, dois, três ou mais dos números da fila inferior, também tomados da direita para esquerda, é obtido, com resultado, a grandeza pretendida em cada caso de combinações (Katz, 2010, p. 285).

Para Katz (2010), o estudioso indiano não deixou qualquer registro que pudesse comprovar a criação de um modelo matemático para representar o pensamento dele na solução do problema dos ingredientes e, também, no problema da formação de joias (diamante, safiras, esmeraldas, corais e pérolas) em colares. É importante observar que as práticas combinatórias desenvolvidas na cultura indiana procuravam soluções para problemas envolvendo combinação. Mas, no mesmo período, século IX, na cultura judaica, foi registrado um texto do rabino italiano, Shabber Donnolo, estudioso do *Sefer Yetsirah*[1], que abordava questões envolvendo permutação de letras:

> A primeira letra de uma palavra de duas letras pode ser trocada duas vezes e, para cada letra inicial de uma palavra de três letras, as outras podem ser trocadas para formarem duas palavras de duas letras por cada uma das três vezes. E todos os arranjos que existem de palavras de três letras correspondem a cada uma de quatro letras que podem ser colocadas numa palavra de quatro letras: uma palavra de três letras pode ser formada de seis maneiras e, assim, para cada letra inicial de uma palavra de quatro letras há seis maneiras – perfazendo, no conjunto, vinte e quatro palavras, e assim sucessivamente (Katz, 2010, p. 372).

O *Sefer Yetsirah*, livro que Donnolo extraiu as ideias da citação anterior, foi escrito por um autor desconhecido que procurou calcular várias formas de arranjar as 22 letras do alfabeto hebraico. Katz (2010) afirma que a prática de arranjar as letras do alfabeto ocorria porque os judeus místicos acreditavam que Deus havia criado as coisas do mundo por meio das permutações entre as letras, como descreve a citação a seguir:

> Deus apoderou-se delas, combinou-as, pesou-as, trocou-as e, com elas produziu toda criação e tudo que está destinado a ser criado... Duas pedras (letras) constroem duas casas (palavras), três constroem seis casas; quatro, vinte e quatro; cinco constroem cento e vinte; seis coisas setecentos e vinte coisas (Katz, 2010, p. 372).

Essa parte do livro da criação evidencia que o autor desenvolveu um método para o cálculo das permutações simples sem apresentar um modelo matemático para representar suas ideias e, sim, o puro uso da linguagem.

As ideias iniciais em torno do que hoje conhecemos por Principio Fundamental da Contagem(PFC) e as permutações com letras, já eram conhecidos pelos indianos e judeus para resolver problemas do cotiano, que também eram conhecidos na cultura árabe.

COMBINATÓRIA NA CULTURA ÁRABE E JUDAICA

Os problemas envolvendo palavras apresentavam uma forte presença nas práticas da Combinatória, também, na cultura árabe, tornando-se até mesmo práticas de pesquisas que culminavam, sob um nível teórico, na construção de novas ciências. Este fato é descrito por

[1] Para Katz (2010, p. 372), o Sefer Yetsirah ou livro da criação é a fonte judaica mais antiga que apresenta práticas combinatórias. O livro foi escrito em algum tempo entre os séculos II e VIII.

Djebbar (1981):

> Com o advento do fenômeno da tradução, o estatuto privilegiado do árabe favoreceu o desenvolvimento de várias “Ciências da Linguagem”. Neste contexto, os lexicógrafos enumeraram as configurações de letras do alfabeto, sujeitas a certas restrições, a fim de torná-las léxicas. Sabemos, por exemplo, que al-Khalil ibn Ahmad (século VIII) deu o número de combinações p a p ($2 \leq p \leq 5$) das 28 letras do alfabeto árabe, e depois dele, o gramático Sibawayh (século VIII) havia determinado o número de permutações p a p ($2 \leq p \leq 5$) das mesmas letras, mas tendo em conta incompatibilidade de pronuncias (Djebbar, 1981, p. 125, tradução nossa).

As práticas de pesquisas da cultura árabe, que utilizavam a combinatória como instrumento, não ficaram restritas às ciências da linguagem. Segundo Djebbar (1981), os estudos nos campos da química também utilizavam práticas combinatórias desenvolvidas por jabir ibn H Ayyan (século VII):

> Jabir ibn H Ayyan teorizou uma espécie de elementos combinatórios que constituem o material. Com base nas quatro qualidades elementares (calor, frio, seca, umidade) que são a base da química e da medicina árabe, ele introduziu a noção de grau, cada um. Composto por sete divisões (minuto, segundo, etc.). Então ele classificou o alfabeto árabe em quatro categorias correspondentes às quatro qualidades e ele estabeleceu uma estreita relação entre as combinações de letras e essa qualidade. Dessa forma, os estudos em química tornaram-se uma morfologia de metais à imagem da língua por meio de composição de palavras (Djebbar, 1981, p. 125, tradução nossa).

Para Djebbar (1981), as práticas combinatórias da cultura árabe contribuíram para o desenvolvimento nos estudos: em música, utilizando combinação de notas músicas; na trigonometria e na álgebra, por meio do método de enumeração direta.

A utilização da Combinatória na busca de solução para problemas práticos ou aplicados em várias áreas do conhecimento humano foi, até o século XII, evidenciada pelo forte uso da linguagem e operacionalizada por uma forma de raciocínio indutivo.

Este fato é observado em todas as culturas que conseguimos alcançar neste estudo bibliográfico, no qual a continuação deste texto apresentamos os fragmentos textuais que descrevem os primeiros passos para a busca de um pensamento abstrato nas práticas combinatórias.

No contexto da cultura judaica, há registros do século XII do Rabino Abrham bem Meir ibn Ezra em textos envolvendo astrologia. Katz (2010) descreve que o rabino desenvolvia estudos que discutiam o número de conjunções possíveis de sete planetas, incluindo o Sol e a Lua.

A prática Combinatória de ibn Ezra estava associada à concepção de que as conjunções dos planetas tinham poderosa influência na vida humana. Dessa forma, ibn Ezra apresentou um método aritmético para calcular as conjunções dos planetas, dois a dois, três a três, quatro a quatro, cinco a cinco, seis a seis, e sete a sete. Katz (2010) descreve que o rabino

> Começou com o caso mais simples, onde o número de conjunções dois a dois era 21. Este número era igual à soma dos inteiros de 1 a 6 e podia ser calculado com a regra de ibn Ezra para a soma dos números inteiros de 1 até um dado número pela sua metade e pela metade da unidade...Para calcular combinações três a três, ibn Ezra explica "começamos por colocar Saturno com Júpiter e, com eles, um dos outros planetas. O número de outros planetas é cinco; multiplique-se 5 pela sua metade e por metade da unidade. O resultado é 15. Estas são as conjunções de júpiter" ...há cinco combinação três a três envolvendo Saturno e Júpiter, quatro envolvendo Júpiter e Marte, mas não Saturno, e assim sucessivamente. Há assim $5.\frac{5}{2}+5.\frac{1}{5}=155.\frac{5}{2}+5.\frac{1}{5}=15$, conjunções três a três envolvendo Júpiter. Analogamente, para achar as conjunções três a três, envolvendo Saturno, mas não Júpiter, ibn Ezra necessita de calcular o número de situações de dois planetas dos restantes cinco (Katz, 2010, p. 373).

O método utilizado pelo rabino ibn Ezra, em notações modernas, pode ser observado abaixo:

- Para os cálculos de base:

$$C_2^n=\sum_{i=1}^{n-1} i=(n-1).\frac{n-1}{2}+(n-1).\frac{1}{2}=\frac{n(n-1)}{2}C_2^n=\sum_{i=1}^{n-1} i=(n-1).\frac{n-1}{2}+(n-1).\frac{1}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

- Cálculo Geral:

$$C_7^7+C_6^7+C_5^7+C_4^7+C_3^7+C_2^7=120C_7^7+C_6^7+C_5^7+C_4^7+C_3^7+C_2^7=120$$
$$C_3^7=C_2^6+C_2^5+C_2^4+C_2^3+C_2^2=35$$
$$C_4^7=C_3^6+C_3^5+C_3^4+C_3^3=35$$
$$C_5^7=C_4^6+C_4^5+C_4^4=21$$
$$C_6^7=C_5^6+C_5^5=7$$
$$C_7^7=C_6^6=1$$

É importante ressaltar que o método aritmético desenvolvido por ibn Ezra tem uma semelhança muito grande com algumas propriedades do triângulo aritmético desenvolvido pelos chineses, com data aproximada para o século XI, mas nada se tem para comprovar que o rabino tivesse conhecimento do triângulo desenvolvido pelos chineses.

Há, também, registros do século XIII, na cultura do Islão, mostrando que Ahmad al-Bb`dari ibn Mun`im estudava o cálculo do número de combinações de r objetos de um conjunto de n, procurando este número em termos de combinações de r-1 objetos. (Katz, 2010, p. 328).

Entre os problemas envolvendo combinação que ibn Mun´im estudou, destaca-se o

ISSN - 1982-6109

seguinte: *quantos conjuntos diferentes de cores podem ser obtidos com dez cores de seda?* A solução do problema é descrita por Katz (2010):

> Para determinar o número de combinações de três cores, primeiro combina-se a terceira cor com a primeira e segunda; depois, combina-se a quarta cor com cada par de cores entre as três cores que precedem – a primeira, a segunda e a terceira –, depois combina-se a quinta cor com cada par de cores entre as quatro cores precedentes... até à combinação da décima cor com cada par de cores entre as nove cores precedentes. Mas cada par de cores é uma combinação da segunda linha (Katz, 2010, p. 328).

O procedimento utilizado por Ibn Mun`im era idêntico àquele do rabino ibn Ezra, mas para efeito de cálculo ele utilizava a tabela representada na figura 3, que tem características do triângulo aritmético:

Figura 3: Triângulo Aritmético

و هكذا تخطيط المثال في الجدول											جدول جمع الجداول
من عشرة ألوان										1	1
جدول الشراريب التي من تسعة ألوان تسعة ألوان									1	9	10
جدول الشراريب التي من ثمانية ألوان ثمانية ألوان								1	8	36	45
جدول الشراريب التي من سبعة ألوان سبعة ألوان							1	7	28	84	120
جدول الشراريب التي من ستة ألوان ستة ألوان						1	6	21	56	126	210
من خمسة ألوان خمسة ألوان					1	5	15	35	70	126	252
من اربعة ألوان اربعة ألوان				1	4	10	20	35	56	84	210
من ثلاثة ألوان ثلاثة ألوان			1	3	6	10	15	21	28	36	120
من لونين لونين		1	2	3	4	5	6	7	8	9	45
من لون لون	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
	لون أول	لون ثان	لون ثالث	لون رابع	لون خامس	لون سادس	لون سابع	لون ثامن	لون تاسع	لون عاشر	جميع الألوان

Fonte: Djebbar (1985, p. 101)

No que tange à tradicional discussão da cultura árabe sobre problemas envolvendo palavras, ibn Mun`im estudou o seguinte problema: *como conseguir um processo canónico para determinar o número de permutação de letras de uma palavra da qual o número de letras é conhecido, e que não repita qualquer letra?* Segundo Katz (2010), o estudioso ibn Mun`im concluiu que:

> Não importa quão longa seja a palavra, o número de permutações acha-se multiplicando um por dois, por três, por quatro, por cinco, e assim sucessivamente, até ao número de letras da palavra. ibn Mun`im ataca outros problemas incluindo permutação com repetição, antes de tratar de assuntos de pronúncia e variação de vogais. O seu objetivo é determinar o número de palavras possíveis em árabe e, depois de alguma discussão sobre o que isto significa exatamente, usar algumas das ideias expostas anteriormente para calcular explicitamente o número de palavras de nove letras, cada letra tendo duas não repetidas, duas repetidas duas vezes, e uma letra repetida três vezes. Resultando em um número com 16 dígitos decimais (Katz, 2010, p. 330).

Os primeiros registros que apresentam uma prática combinatória dissociada de práticas que envolviam problemas com palavras, problemas com joias, problemas com cores, problemas com planetas etc., ocorreram a partir do século XIII. Um dos principais exemplos é do marroquino ibn al-Bannã (1256-1321), seguidor direto dos trabalhos de ibn Mun`im.

Os estudos realizados por ibn al-Bannã procuravam demonstrar fórmulas gerais para resolver problemas da Combinatória utilizando o método indutivo, mesmo que não tenha em algum momento deixado registrado que utilizava tal método, sendo assim, os trabalhos de ibn al-Bannã evidenciam o período inicial no qual o pensamento abstrato é posto em práticas combinatória.

Os motivos que levaram o marroquino ibn al-Bannã a realizar esses estudos ainda não foram esclarecidos, mas dois pontos são importantes destacar: o primeiro ponto refere-se à manifestação de um pensamento abstrato desenvolvido por meio do raciocínio indutivo; o segundo ponto é que, para nós, o matemático ibn al-Bannã desenvolveu esse estudo porque trabalhos anteriores já haviam apresentado soluções aos ditos problemas das letras, das cores etc., de modo que sem esse ponto inicial ibn al-Bannã não chegaria tão longe.

Em síntese, os fragmentos históricos apresentados revelam práticas combinatórias que tiveram suas origens em práticas culturais não matemáticas, por meio de métodos operacionalizados pelo raciocínio indutivo e representado pelo uso da linguagem natura na solução dos problemas.

A partir do século XIII, especificamente na cultura árabe, as práticas combinatórias passam para um contexto mais matemático[2]. Este fato fica evidente com os estudos desenvolvidos por Levi bem Gerson (início do século XIV), com sua notável obra conhecida como *A Arte do Calculador* (Maasei Hoshev).

Segundo Katz (2010), o texto da obra de Levi bem Gerson apresenta rigorosas e cuidadosas demonstrações de várias fórmulas combinatórias e tem sua estrutura dividida em duas partes: teórica e prática. Na parte teórica da obra, o autor demonstra as proposições utilizando o método indutivo. Observada na proposição 63, retiradas do livro *A Arte do Calculador:*

> PROPOSIÇÃO 63 Se o número de permutações de um dado número de elementos diferentes é igual a um número dado, então o número de permutações de um conjunto de diferentes elementos contendo um número mais, é igual ao produto do primeiro número de permutações e o número a seguir ao número dado (Bem Gerson, 1321 *apud* Katz, 2010, p. 377).

A citação revela o nível teórico que as práticas combinatórias passaram assumir e, com isso, surgiu a necessidade dos registros simbólicos para substituir a linguagem natural presente nas soluções dos problemas que de certa forma foram substituídos por problemas simbólicos.

Ainda se tratando da obra de Levi Bem Gerson, Katz (2010) apresenta um questionamento acerca do fato de que, em 1321, os resultados básicos sobre combinações estavam disponíveis na Europa e que virtualmente ninguém pareceu interessar-se pela matemática das combinações e, quando a análise combinatória finalmente reapareceu, não havia qualquer referência às contribuições de Levi Bem Gerson (Katz, 2010, p. 379).

As culturas Árabe e judaia contribuiram para o desenvolvimento da Análise Combinatória Moderna, mas ganhou um grande impulso por meio da cultura europeia

COMBINATÓRIA NA CULTURA EUROPEIA

No contexto da cultura europeia (século XIII), destacaram-se duas práticas combinatórias que serviram de base à Combinatória Moderna: a primeira, fundamentada por aspectos filosóficos e religiosos, surgiu com o Catalão místico, poeta e missionário Ramon Llull

[2] Referimo-nos dessa forma para explicar que a postura utilizada pelos estudiosos da época tem uma aproximação com o oficio dos matemáticos puros.

PAIDÉI@
ISSN - 1982-6109
REVISTA CIENTÍFICA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

(1232-1316).

Sua *Ars Magna* foi um resumo sistemático de todos os ramos do conhecimento de seu tempo, com base na arte combinatória; a segunda prática foi o advento dos jogos de azar, especialmente dados, que surgiu por meio de um poema ovidiano intitulado *De Ventura*, escrito em uma velha carta, entre 1222 e 1268, provavelmente por Richard de Fournival. Segundo Knobloch (2013), o autor do poema enumerou cinquenta e seis diferentes resultados como três dados e verificou que não são equiprováveis. Com isso, o poema também contribuiu para o desenvolvimento da teoria das probabilidades.

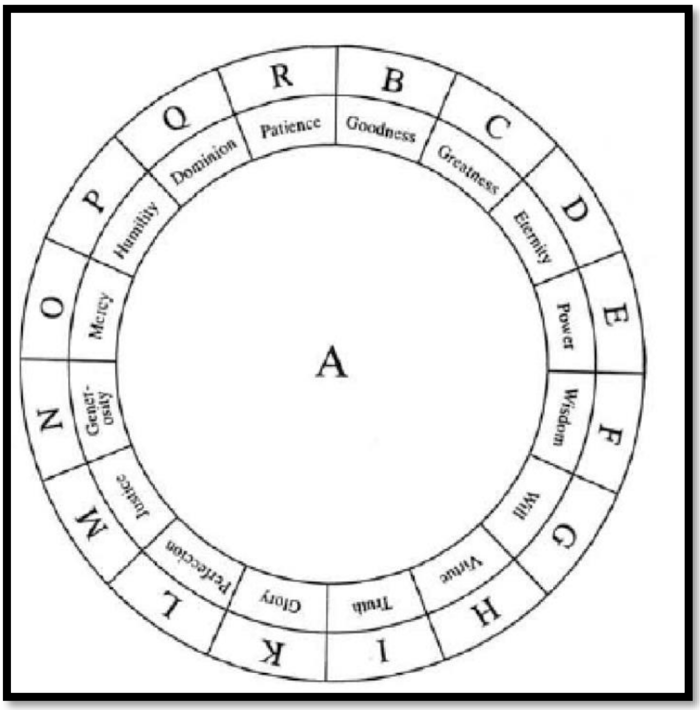
Para Marostica (1992), a arte combinatória de Ramon Llull é um método pelo qual ele tenta encontrar e explorar todas as combinações possíveis, denominadas de manifestações, e os conceitos primitivos, chamados de dignidades divinas. A autora enfatiza, ainda, que o método de Llull foi concebido como uma nova forma de responder com infalibilidade matemática a qualquer tipo de pergunta e, consequentemente, obter o verdadeiro conhecimento. O Catalão desenvolveu uma nova Lógica, denominada de chave universal[3], influenciando fortemente os trabalhos de Mersenne (1588-1648) e de Leibniz (1646-1716).

É importante ressaltar que Llull desenvolveu na realização de seus estudos somente combinações de dois e três elementos, que representam a base essencial da arte combinatória como um sistema lógico, mas calculadas por enumeração direta da constituição dos agrupamentos. Enquanto Mersenne e Leibniz, além de procurarem conhecer os conceitos básicos (divindades) que representavam as verdadeiras propriedades de Deus operando na natureza, seguindo os ensinamentos de Llull, desenvolveram alguns métodos combinatórios. O mecanismo que produz essas combinações é operacionalizado principalmente por figuras. As figuras constantes, na obra de Llull, são denominadas de figura A e figura T. A primeira figura (figura 4) expressa os princípios absolutos ou dignidades divinas e a segunda figura (figura 5) expressa os princípios de relação:

Figura 4: Princípios absolutos ou dignidades divinas

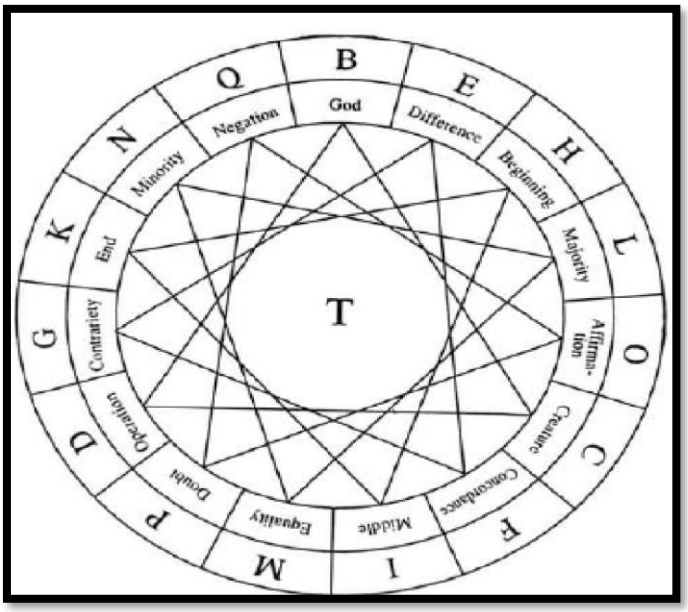
[3] Termo utilizado por Rossi (2001) referindo-se à linguagem universal que os pensadores desde Llull até Leibniz buscavam para a ciência.

PAIDÉI@
ISSN - 1982-6109
REVISTA CIENTÍFICA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA



Fonte: Marostica (1992, p. 107)

Figura 5: Os princípios de relação.



Fonte: Marostica (1992, p.107)

Para exemplificar melhor o pensamento de Llull, apresentamos um fragmeto do texto de Marostica (1992, p. 107):

> A figura A significa Deus, que é representado por um ponto ao centro do círculo. A circunferência desse círculo é dividida em dezesseis compartimentos (período terciário). LIuII classificou esses compartimentos com as letras do alfabeto, de B até R, significando os atributos de Deus. Com esses atributos divinos LIull forma (no período quaternário) cento e vinte combinações binárias. Ele obtém este número usando (*as compendiosa invenienti veritatem*) combinações sem repetição de dezesseis conceitos agrupados dois de cada vez, portanto obtendo $\binom{16}{2} = \frac{16.15}{2.1} = 120$ $\binom{16}{2} = \frac{16.15}{2.1} = 120$. Desta forma, ele obtém, por exemplo, BC (a bondade é grandiosa), BD (a bondade é eterna) e assim por diante. Em *Ars Demonstrativa*, LIull usa combinações com repetições de dezesseis elementos dois de cada vez, então ele obtém $\binom{16+2-1}{2} = \binom{17}{2} = \frac{17.16}{2.1} = 136.$ $\binom{16+2-1}{2} = \binom{17}{2} = \frac{17.16}{2.1} = 136.$ (Marostica 1992, p. 107):

A obra de Llull não apresenta nenhuma evidência que o catalão conhecia as fórmulas para o cálculo das combinações. Entretanto, sua linha de raciocínio sobre os objetos de suas investigações é que nos leva a acreditar que na cultura de Llull era comum a solução de problemas práticos por meio das combinatórias.

E, talvez, as práticas combinatórias já estivessem nos centros de ensino da época,onde é na cultura europeia que a Análise Combinatoria ganha as formas e simbolos que usamos ainda hoje e que é ensinado nas escolas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudos que tratam da história da Análise Combinatória ainda são muito incipientes e carregam o fardo das críticas por se apresentarem de maneira factual e, também, por oferecerem uma análise que mistura objetos da Análise Combinatória do presente com os do passado.

É óbvio que uma análise mais crítica, envolvendo cada cultura e suas práticas, com as realidades sociais de cada época e civilização, seria o ideal para entender o desenvolvimento da Análise Combinatória e ter uma melhor aproximação do modo como os sujeitos elaboravam e resolviam os problemas combinatórios.

Entretanto, podemos dizer que neste estudo conseguimos observar que houve um salto epistemológico instaurado por uma fantástica invenção humana, o ato de contar. Muitas foram as formas de contar desenvolvidas por várias civilizações para solucionar problemas cotidianos. Diante disso, as civilizações tiveram que criar uma tecnologia para ser utilizada, denominada de Contagem.

A Contagem é uma prática cultural desenvolvida por técnicas criadas pelo homem para quantificar objetos, nosso entendimento é que houve, sim, um intercâmbio cultural entre as civilizações do Oriente Médio e, também, com os povos europeus. Dessa forma, a prática da Contagem foi elevada a um nível mais teórico e, com isso, surgiu um novo termo para o ato de contar objetos, por meio de técnicas, denominado de Análise Combinatória.

REFERÊNCIAS

BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Revista History Mathematica**, v. 6, p. 109-136, 1979.

BRÉARD, A. **The origins of modern combinatorics**. In: WATKINS, John J.; WILSON, Robin. China. Oxford: Oxford University Press, 2013. Cap. 2. p. 65-82.

DJEBBAR, A. Enseignement et recherche mathématiques dans le Maghreb des XII$^{\varepsilon}$ –XIV$^{\varepsilon}$ siècles. Paris: Publications Mathématiques d'Orsay, 1981.p.146

DJEBBAR, A. **L´Analyse Combinatorie au Magreb**: L´Exemplo d`Ibn Mun`im (XII-XIII). Orsay: Université de Paris Sud, Publications Mathématiques D´orsay, 1985. 122 p.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

KATZ, V. J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

KNOBLOCH, E. The origins of modern combinatorics. In: WATKINS, John J.; WILSON, Robin. **Combinatorics: Ancient And Modern**. Oxford: Oxford University Press, 2013. Cap. 6. p. 147-163.

MAROSTICA, A. H. **Ars combinatoria and time**: Llull, Leibniz and Peirce. Studia Lulliana, Catalunia, v. 32, n. 1, p. 105-143. 1992.

PINTO, G.A.C**. I Ching**: o livro das mutações / tradução do chinês para o alemão, introdução e comentários Richard Wilhelm; prefácio C. G. Jung; introdução à edição brasileira Gustavo Alberto Corrêa Pinto; tradução para o português Alayde Mutzenbecher e Gustavo Alberto Corrêa Pinto. São Paulo: Pensamento, 2006.

ROSSI, P. **O nascimento da ciência moderna na Europa**. Bauru. EDUSC, 2001.

Artigo Recebido em: 01/08/2024

Aceito para Publicação em: 27/12/2024

Carlos Alberto de Miranda Pinheiro

https://orcid.org/0000-0003-3195-5443

Professor Adjunto do Departamento de Matemática Estatística e Informática da Universidade do Estado do Pará(UEPA). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UEPA. Professor Classe III do Centro de Estudos, Pesquisas e projetos Estratégicos em Governança Pública do Estado do Pará(CEPPE-EGPA). Doutor em Educação Matemática , Mestre em Educação na linha de metodologias e Formação de Professores, Especialista em Metodologias para o ensino de Matemática com complementação pedagógica para o exercício da docência no Ensino Superior, Especialista em Educação Matemática , Especialista em Fundamentos de Matemática Elementar ,Aperfeiçoamento para o ensino de Matemática no segundo grau . Bacharel em Ciências Náuticas e Licenciado Pleno em Matemática. Foi Pedagógico do Projeto de Formação Para Professores do Ensino Médio com foco no ENEM e BNCC(FORPEM-EGPA). Atualmente coordena o curso de licenciatura em Matemática da UEPA. Foi professor da rede privada de ensino Básico e Superior no Estado do Pará(1993 - 2015); Foi Coordenador do Centro de Formação de Profissionais da Educação do Estado do Pará (2015-2018); foi Diretor de Desenvolvimento de Pessoas da Secretaria de Estado e Educação do Pará (2018), coordenador estadual do prêmio professores do Brasil(2017-2018), membro do grupo de trabalho formação continuada de professores do Conselho Nacional de Secretários de Educação(CONSED/ 2017-2018) ; Vice Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática e Educação Matemática (CCSE/UEPA) . Realiza estudos no campo da Educação Matemática com ênfase: Ensino e Aprendizagem da Análise Combinatória , Formação de Professores que Ensinam Matemática e Metodologias STEM. Realiza estudos no campo da Gestão Pública com ênfase no eixo Educação, Direito e Cidadania.

Fabricio da Silva Lobato

https://orcid.org/0000-0002-4250-4763

Possui graduação em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2014). Doutorado em andamento em Educação em Ciências e Matemáticas(UFPA). Atualmente é professor de Matemática em Pré -Vestibular. Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA-2022). Especialista em ENEM: COMPETÊNCIAS E HABILIDADES EM MATEMÁTICA E CIÊNCIAS DA NATUREZA(Estácio-RJ). Especialista em Metodologia do Ensino de Matemática (Estácio-RJ). Especialista em Matemática e suas tecnologias e o Mundo do Trabalho pela Universidade Federal do Piauí (UFPI). Membro do Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática (GEDIM-UFPA). Membro do Grupo de Pesquisa em Estatística (GEDIM-Statistics-UFPA). Membro da

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Pesquisando e publicando em Alto nível nas áreas de Didática da Matemática, História da Matemática e Estudos sobre Competências e Habilidades em Matemática para o Enem.

Cassio Cristiano Giordano

https://orcid.org/0000-0002-2017-1195

Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP). Pós-Doutor em Educação em Ciências pela Universidade Federal do Rio Grande (FURG). É também psicólogo e pedagogo. Integra o Grupo Internacional de Pesquisa em Educação Estatística – GIIPEE/FURG do Innovation Center of Statistics Education ICE e o Grupo de Pesquisa em Educação Estatística GEDIM STATISTIC, da Universidade Federal do Pará (UFPA).